

Resumen de Formulas Utiles del Metodo AF

Slides prepared by Maria Emma Santos
CONICET-UNS & OPHI

Tabita, Kenya

Rabiya, India

Stephanie, Madagascar

Agatha, Madagascar

Dalma, Kenya

Ann-Sophia, Kenya

Valérie, Madagascar



Matriz de Logros

Vector de umbrales de privacion y vector de ponderaciones

- Donde x_{ij} es el logro del individuo i en el atributo o dimension j .
- z_j es el umbral de privacion del atributo o dimension j .
- w_j es la ponderacion del atributo o dimension j tal que:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_d = \mathbf{d}$$

Dimensions

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \dots & \mathbf{X}_{1d} \\ \mathbf{X}_{21} & \dots & \mathbf{X}_{2d} \\ \dots & & \\ & & \dots \\ \mathbf{X}_{n1} & \dots & \mathbf{X}_{nd} \end{bmatrix}$$

G
e
n
t
e

$$\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d)$$

$$\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_d)$$

Matriz de Privaciones

Dimensiones

Donde

- $g_{ij}^0 = 1$ si $x_{ij} < z_j$ (con privacion)
- $g_{ij}^0 = 0$ si $x_{ij} \geq z_j$ (sin privacion)
- O equivalentemente:

$$g_{ij}^0 = \left(\frac{z_j - x_{ij}}{z_j} \right)^0$$

$$g^0 = \begin{bmatrix} g_{11}^0 & \dots & g_{1d}^0 \\ g_{21}^0 & \dots & g_{2d}^0 \\ \dots & & \dots \\ g_{n1}^0 & \dots & g_{nd}^0 \end{bmatrix} \begin{matrix} G \\ e \\ n \\ t \\ e \end{matrix}$$

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$$

Tasas de Privacion Dimensionales No-Censuradas

- Son las tasas de privacion por indicador, ie. la proporcion de personas que estan privadas en esa dimensions.
- Es simplemente la media de cada columna de la matriz de privacion:

$$H_j = (g_{1j}^0 + g_{2j}^0 + \dots + g_{nj}^0) / n$$

Matriz de Privacion Ponderada

Notar que utilizamos la misma notacion que para la matriz de privacion (sin ponderar) a proposito.

Donde

- $g_{ij}^0 = w_j$ si $x_{ij} < z_j$ (privado)
- $g_{ij}^0 = 0$ si $x_{ij} \geq z_j$ (no-privado)
- O equivalentemente:

$$g_{ij}^0 = w_j \left(\frac{z_j - x_{ij}}{z_j} \right)^0$$

$$g^0 = \begin{bmatrix} g_{11}^0 & \cdots & g_{1d}^0 \\ g_{21}^0 & \cdots & g_{2d}^0 \\ \cdots & & \cdots \\ g_{n1}^0 & \cdots & g_{nd}^0 \end{bmatrix}$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$$
$$w = (w_1, w_2, \dots, w_d)$$

Vector de Conteo de Privaciones

Donde el ‘conteo de privacion’ or puntaje de cada persona es la suma ponderada de sus privaciones

- $c_i = g_{i1} + \dots + g_{id}$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Identificación de los pobres

Dado un umbral de pobreza k ($0 < k \leq d$), comparamos el conteo de privaciones con el umbral k y luego censuramos las privaciones de aquellos que no fueron identificados como pobres.

$$r_k(x_i; z) = 1 \quad \text{if} \quad c_i \geq k \quad \text{pobre} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$r_k(x_i; z) = 0 \quad \text{if} \quad c_i < k \quad \text{no - pobre}$$

Matriz de Privacion Censurada y Vector de Conteo de Privaciones

Esta es la matriz clave (y el vector) con los cuales calculamos el conjunto de indicadores AF para M_0

$$g^0(k) = \begin{bmatrix} g_{11}^0(k) & \dots & g_{1d}^0(k) \\ g_{21}^0(k) & \dots & g_{2d}^0(k) \\ \dots & & \dots \\ g_{n1}^0(k) & \dots & g_{nd}^0(k) \end{bmatrix} \quad c(k) = \begin{bmatrix} c_1(k) \\ c_2(k) \\ \dots \\ c_n(k) \end{bmatrix} \quad c(k)/d = \begin{bmatrix} c_1(k)/d \\ c_2(k)/d \\ \dots \\ c_n(k)/d \end{bmatrix}$$

Donde

- $g_{ij}^0(k) = g_0$ (es decir $= (w_j)$) si $c_i \geq k$ (privado & pobre)
- $g_{ij}^0(k) = 0$ si $c_i < k$ (privado o no, pero no-pobre)
- Tambien: $c_i(k) = c_i$ si $c_i \geq k$ y $c_i(k) = 0$ si $c_i < k$
- Tambien es util expresar el conteo de privaciones como una proporcion del total de dimensiones $c(k)/d$.

Primero nos centramos en la medida
 M_0 y todos sus indicadores
relacionados

Tasa de Recuento de la Pobreza Multidimensional

Es la proporción de personas que han sido identificadas como pobres:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_k(x_i; z)}{n} = \frac{q}{n}$$

Donde q es el número de personas pobres

La tasa de recuento es llamada a veces la *incidencia de la pobreza*, o tasa de pobreza

Intensidad (o amplitud) de la Pobreza

MD

- Es la proporción promedio de privaciones en las cuales los pobres están privados.

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n c_i(k)}{dq}$$

Notese que es simple de calcular:

- 1) Se calcula la proporción del total de privaciones que experimenta cada persona ($c_i(k)/d$). Notar que debemos utilizar el vector de conteo censurado, ie: ignoramos las privaciones de los no-pobres.
- 2) Se toma el promedio de esas proporciones (por eso es que se divide por q , el número de personas pobres)

Pobreza Multidimensional: M_0

(Tasa de Recuento Ajustada)

- Es el producto de la incidencia y la intensidad.

$$M_0 = H \times A$$

- O equivalentemente, es la media de la matriz (ponderada) de privaciones censurada:

$$M_0 = \mu(g^0(k)) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d g_{ij}^0(k)}{nd}$$

Como interpretamos M_0 ?

- M_0 es la media de la matriz (ponderada) de privaciones censuradas, es decir, es la suma de todas las entradas no-nulas de la matriz cada una de las cuales esta ponderada por su correspondiente peso) dividido el total de entradas de la matriz (personas x indicadores).

Como interpretamos M_0 ?

- **Matriz Censurada de Privaciones Ponderada:**

- (1) El numero total de entradas constituye el numero total de privaciones que la sociedad puede experimentar (indicadores x personas).
- (2) El numero total de entradas no-negativas de la matriz es el numero total de privaciones ponderadas que los pobres efectivamente experimentan.

Como interpretamos M_0 ?

- M_0 Interpretacion

M_0 es el ratio de (2)/(1), ie. La media de la matriz censurada de privaciones ponderada.

Entonces, ofrece la proporcion de privaciones ponderadas que los pobres experimentan en esa sociedad, del total de privaciones que podrian experimentar.

Como descomponemos M_0 por indicadores y dimensiones?

Visualmente...

Peo	Ye. Ed	Child Attend	Nutr	Mor	Elec	Wat	Sani	Floor	Cook. Fuel	Assets
1	1.67	1.67	0	0	0	0.56	0	0.56	0	0
2	0	0	1.67	1.67	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0.56	0.56	0.56	0.56	0.56	0.56
4	1.67	0	0	1.67	0.56	0.00	0.56	0	0.56	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Cual es la contribucion de la nutricion en particular?

Como descomponemos M_0 por indicadores y dimensiones?

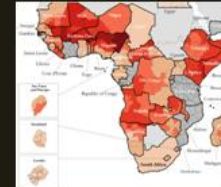
Hay dos indicadores utiles pero diferentes:

- 1) Tasas de privacion censuradas
- 2) Contribuciones por indicador (y por dimension)

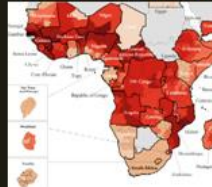
Tasas de Privacion Censuradas

- En que difieren de las tasas de privacion no-censuradas?
- Las tasas no censuradas son la proporcion de personas que estan privadas en determinado indicador.
- **Las tasas censuradas son el % de personas que son pobres y estan privadas en determinado indicador.**
- Cuidado! Las tasas censuradas no son el % de personas pobres privadas en determinado indicador.

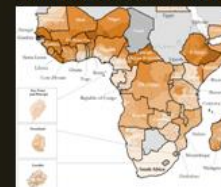
Nutrition (CH)



Child Mortality (CH)



School Attendance (CH)



Safe Drinking Water (CH)



Tasas de Privacion Censuradas

- Son simplemente la media de cada columna de la matriz censurada de privaciones ponderada dividido por la ponderacion del indicador.

$$H_j^C = \frac{\sum_{i=1}^n g_{ij}^0(k)}{w_j n}$$

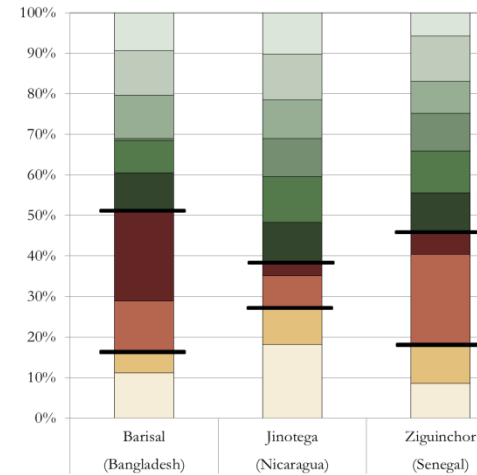
- Notar que M_0 es la suma ponderada de las tasas de privacion censuradas.

$$M_0 = \sum_{j=1}^d \left(\frac{w_j}{d} \right) H_j^C$$

Contribucion por Indicador

- Es la proporción del total de la pobreza que proviene de una privación en particular.
- Recordemos de la lamina anterior:

$$M_0 = \sum_{j=1}^d \left(\frac{w_j}{d} \right) H_j^C$$



- Entonces, la contribucion del indicador j a la pobreza total esta dada por:

$$C_j = \frac{(w_j / d) H_j^C}{M_0}$$

Contribucion por Indicador y Dimension

- Notar: La suma de las contribuciones de todos los indicadores debe dar 1 (o 100%).
- Cuando la contribucion a la pobreza de un indicador en particular excede ampliamente su correspondiente ponderacion, esto sugiere que hay una privacion relativa alta en ese indicador. Los pobres estan privados en ese indicador mas que en otros.
- Si hay mas de un indicador en una dimension, la contribucion de la dimension es simplemente la suma de las contribuciones de todos los indicadores de esa dimension.

Como descomponemos M_0 en subgrupos de poblacion?

Visualmente...

Peo	Ye. Ed	Child Attend	Nutr	Mor	Elec	Wat	Sani	Floor	Cook. Fuel	Assets	Depr. Count
1	1.67	1.67	0	0	0	0.56	0	0.56	0	0	4.44
2	0	0	1.67	1.67	0	0	0	0	0	0	3.33
3	0	0	0	0	0.56	0.56	0.56	0.56	0.56	0.56	3.33
4	1.67	0	0	1.67	0.56	0.00	0.56	0	0.56	0	5
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

GROUP A
↑

↓
GROUP B

Decomposicion en subgrupos de poblacion

Si toda la poblacion X (de tamaño n) es dividida en dos subgrupos X_1 (de tamaño n_1) and X_2 (de tamaño n_2), entonces M_0 es la suma de M_0 en cada subgrupo:

$$M_0(X; z) = \left(\frac{n_1}{n}\right)M_0(X_1; z) + \left(\frac{n_2}{n}\right)M_0(X_2; z)$$

Entonces, la contribucion del subgrupo i a la pobreza total es

$$C_{Gi} = \frac{(n_i / n) M_0(X_i; z)}{M_0(X; z)}$$

Descomposicion en Subgrupos de Poblacion

- Notar que la suma de las contribuciones de todos los grupos debe ser 1 (o 100%).
- Cuando la contribucion a la pobreza de una region o algun otro grupo poblacional excede ampliamente su contribucion poblacional, esto sugiere que hay un importante desbalance en la distribucion de la pobreza entre las personas, con algunas regiones o grupos cargando con una proporcion muy desigual.

Generalizando las formulas de manera
que tambien se apliquen a M_1 y M_2

g^α Matrix

$$g^\alpha = \begin{bmatrix} g_{11}^\alpha & \dots & g_{1d}^\alpha \\ g_{21}^\alpha & \dots & g_{2d}^\alpha \\ \dots & & \\ & & \dots \\ g_{n1}^\alpha & \dots & g_{nd}^\alpha \end{bmatrix}$$

Donde

$$g_{ij}^\alpha = w_j \left(\frac{z_j - x_{ij}}{z_j} \right)^\alpha \quad \text{if} \quad x_{ij} < z_j$$

$$g_{ij}^\alpha = 0 \quad \text{if} \quad x_{ij} \geq z_j$$

Matriz g^α Censurada

(post-identificación, se hace exactamente igual que con M_0)

$$g^\alpha(k) = \begin{bmatrix} g_{11}^\alpha(k) & \dots & g_{1d}^\alpha(k) \\ g_{21}^\alpha(k) & \dots & g_{2d}^\alpha(k) \\ \dots & & \dots \\ g_{n1}^\alpha(k) & \dots & g_{nd}^\alpha(k) \end{bmatrix}$$

Donde

$$g_{ij}^\alpha(k) = g_{ij}^\alpha \quad \text{if} \quad c_i \geq k$$

$$g_{ij}^\alpha(k) = 0 \quad \text{if} \quad c_i < k$$

Pobreza Multidimensional en general

M_1 : Brecha de Pobreza Ajustada

M_2 : FGT Ajustado

$$M_{\alpha} = \mu(g^{\alpha}(k)) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d g_{ij}^{\alpha}(k)}{nd}$$

M_1 : Brecha de Pobreza Ajustada

$$M_1 = H * A * G$$

donde G es la brecha de pobreza promedio considerando todas las instancias en las cuales las personas pobres estan privadas

$$G = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d g_{ij}(k)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d g_{ij}^0(k)}$$

M_2 : FGT Ajustado

$$M_2 = H * A * S$$

Donde S es el promedio de la brecha de pobreza al cuadrado (severidad promedio de la privaciones) en todas las instancias en las cuales las personas pobres estan privadas

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d g_{ij}^2(k)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d g_{ij}^0(k)}$$

Contribucion por Indicador

- Es la proporcion total de pobreza que proviene de una privacion en particular.

- En general:

$$M_{\alpha} = \sum_{j=1}^d \mu(g_{*j}^{\alpha}(k)) / d$$

- Donde:

$$\mu(g_{*j}^{\alpha}(k)) = \sum_{i=1}^n g_{ij}^{\alpha}(k) / n$$

- Entonces, la contribucion del indicador j a la pobreza total esta dado por:

$$C_j = \frac{\mu(g_{*j}^{\alpha}(k))}{dM_{\alpha}}$$

Contribucion por Subgrupos de Poblacion

- Es la proporcion de la pobreza total que proviene de un grupo en particular

$$M_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \mu(g_i^{\alpha}(k)) / n$$

- Si toda la poblacion X (de tamaño n) es dividida en dos subgrupos X_1 (de tamaño n_1) y X_2 (de tamaño n_2), entonces el M_0 total es la suma ponderada del M_0 en cada subgrupo

$$M_{\alpha}(X; z) = \left(\frac{n_1}{n}\right) M_{\alpha}(X_1; z) + \left(\frac{n_2}{n}\right) M_{\alpha}(X_2; z)$$

- Entonces, la contribucion del subgrupo i a la pobreza total es

$$C_{Gi} = \frac{(n_i / n) M_{\alpha}(X_i; z)}{M_{\alpha}(X; z)}$$